a

Kolejność wykonywania działań

Dzierżysz w rękach potężne narzędzie[[1]](#footnote-1). Umiejąc dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić, możesz wyruszać na podbój świata. Najpierw jednak musisz zmierzyć się ze wszystkimi czterema działaniami na raz.

Od czego zacząć?

Intuicje

Co zrobić, kiedy napotkamy działanie, w którym występuje więcej niż jeden z symboli + – ⋅ : ? Zacznijmy od kolizji plusa z minusem. Weźmy działanie:

3 + 6 – 2

Rozumiemy je tak, że liczbę 3 powiększamy o 6, a potem pomniejszamy o 2. W takim razie liczymy:

* Powiększamy o 6: 3 + 6 = 9
* Pomniejszamy o 2: 9 – 2 = 7

Czyli 3 + 6 – 2 = 7. Możemy wziąć nawet dłuższe i bardziej rozbudowane działanie.

7 – 2 + 11 – 16 + 5 + 3 + 1 – 5

Zaczynami od siódemki i bierzemy ją w obroty:

* Pomniejszamy o 2: 7 – 2 = 5
* Powiększamy o 11: 5 + 11 = 16
* Pomniejszamy o 16: 16 – 16 = 0
* Powiększamy o 5: 0 + 5 = 5
* Powiększamy o 3: 5 + 3 = 8
* Powiększamy o 1: 8 + 1 = 9
* Pomniejszamy o 5: 9 – 5 = 4

Kończymy na czwórce. Kiedy robimy wszystkie te powiększenia i pomniejszenia, mówimy że wykonujemy *przekształcenia*. Działanie

7 – 2 + 11 – 16 + 5 + 3 + 1 – 5

Możemy więc przekształcić do prostszej postaci – zapisujemy to tak:

7 – 2 + 11 – 16 + 5 + 3 + 1 – 5 = 5 + 11 – 16 + 5 + 3 + 1 – 5 = 16 – 16 + 5 + 3 + 1 – 5 =

= 0 + 5 + 3 + 1 – 5 = 5 + 3 + 1 – 5 = 8 + 1 – 5 = 9 – 5 = 4

W tym przypadku wynikiem całego działania jest liczba 4. Gdy w trakcie przekształceń zabraknie nam miejsca na papierze, możemy przejść z obliczeniami do następnej linijki. Najczęściej przeskok robimy w miejscu znaku równości . Wtedy zapisujemy = na początku nowej i na końcu poprzedniej linijki. Dla przejrzystości w przypadku rozbudowanych działań warto stosować przejście do następnej linijki po każdym przekształceniu.

Zawsze działanie z dodawaniem i odejmowaniem wykonujemy od lewej do prawej, czyli mówiąc fachowo „w kolejności występowania”. Czemu to takie istotne? Weźmy działanie

7 – 2 + 3

Wykonując je poprawnie, czyli od lewej do prawej, dostajemy

7 – 2 + 3 = 5 + 3 = 8

Gdyby pokusiło nas obliczyć od prawej do lewej, mielibyśmy

7 – 2 + 3 = 7 – 5 = 2

czyli dość istotnie mniej.

Zobaczmy teraz, co się stanie, gdy dołączymy mnożenie. Działanie

3 ⋅ 4 + 5

rozumiemy tak: trzy razy bierzemy czwórkę i jeszcze dodajemy 5. Liczymy więc:

3 ⋅ 4 + 5 = 12 + 5 = 17

Weźmy teraz działanie

9 + 2 ⋅ 4

mamy tu na myśli, że dziewiątkę powiększamy o dwa razy wziętą czwórkę. W takim razie:

9 + 2 ⋅ 4 = 9 + 8 = 17

Widzimy, że zasada liczenia od lewej do prawej przestaje obowiązywać. Gdy znajdziemy w działaniu mnożenie, wykonujemy je, zanim cokolwiek dodamy. Tak samo z odejmowaniem:

* 3 ⋅ 4 – 5 oznacza, że trzy razy bierzemy czwórkę i odejmujemy od tego 5.

3 ⋅ 4 – 5 = 12 – 5 = 7

* 9 – 2 ⋅ 4 oznacza, że dziewiątkę pomniejszamy o dwa razy wziętą czwórkę.

9 – 2 ⋅ 4 = 9 – 8 = 1

Do pełni szczęścia potrzeba nam jeszcze dzielenia. Matematycy umówili się, że dzielenie jest równorzędne z mnożeniem. Oznacza to, że w rozbudowanych działaniach najpierw wykonujemy mnożenie i dzielenie w kolejności występowania, a następnie dodawanie i odejmowanie w kolejności występowania. Zobaczmy, jak to wygląda w praktyce:

* Działanie 6 ⋅ 5 : 2 zawiera tylko dzielenie i mnożenie. Liczymy od lewej do prawej, czyli najpierw mnożymy 6 ⋅ 5, a potem dzielimy wynik przez 2.

6 ⋅ 5 : 2 = 30 : 2 = 15

* W działaniu 4 : 2 + 2 występuje dzielenie i dodawanie. Najpierw zajmujemy się dzieleniem 4 : 2, a potem dodajemy 2.

4 : 2 + 2 = 2 + 2 = 4

* Działanie 2 + 7 ⋅ 3 – 5 ⋅ 4 składa się z dodawania, mnożenia i odejmowania. Najpierw wykonujemy mnożenie, czyli zajmujemy się 7 ⋅ 3 oraz 5 ⋅ 4. Potem dodajemy i odejmujemy od lewej do prawej.

2 + 7 ⋅ 3 – 5 ⋅ 4 = 2 + 21 – 20 = 23 – 20 = 3

* 6 + 3 ⋅ 10 : 5 – 6 : 3 + 5 – 2 : 1 ⋅ 4 zawiera wszystkie działania. Zaczynami od mnożenia i dzielenia, czyli najpierw rozbrajamy fragmenty 3 ⋅ 10 : 5, 6 : 3 oraz 2 : 1 ⋅ 4. W tych cząstkach dzielenie i mnożenie wykonujemy od lewej do prawej. Na koniec zostaje nam dodawanie i odejmowanie od lewej do prawej.

6 + 3 ⋅ 10 : 5 – 6 : 3 + 5 – 2 : 1 ⋅ 4 =

= 6 + 30 : 5 – 2 + 5 – 2 ⋅ 4 =

= 6 + 6 – 2 + 5 – 8 =

= 12 – 2 + 5 – 8 =

= 10 + 5 – 8 =

= 15 – 8 =

7

To „pierwszeństwo” mnożenia i dzielenia względem dodawania i odejmowania ma sens. Odejmowanie jest odwrotne do dodawania, więc te działania są równorzędne, czyli „równouprawnione”. Mnożenie jest jednak „wyższego rzędu”, ponieważ wywodzi się z dodawania przez jego wielokrotne powtarzanie. Dzielenie jest odwrotne do mnożenia, więc te dwa działania także są równouprawnione. Fachowo mówi się, że mnożenie i dzielenie *wiążą mocniej* niż dodawanie i odejmowanie.

Umiejąc wykonywać wszystkie cztery działania, możemy sprostać wielu problemom natury życiowej.

* Czerwony kapturek miał 1 babcię. Gdy wilk zjadł babcię, czerwony kapturek miał 0 babć. Z pomocą przyszedł myśliwy, który wyciągnął babcię z brzucha wilka. Czerwony kapturek znowu ma 1 babcię.

1 – 1 + 1 = 0 + 1 = 1

* Liczba oczu pająka wynosi 4. Dwugłowy pająk ma więc 8 gałek ocznych. Gdy postawisz naprzeciw siebie 3 dwugłowe pająki i 5 cyklopów, będzie na ciebie patrzyło 29 sztuk oczu.

2 ⋅ 4 ⋅ 3 + 1 ⋅ 5 = 8 ⋅ 3 + 5 = 24 + 5 = 29

* Stefan znalazł się w tłumie 4 szczęśliwców, którym dobrodziej rozda zapas 20 jabłek z działki. Stefan załapał się na 5 jabłek. Wracając do domu, natknął się na jabłoń. Z każdej z trzech gałęzi zerwał 2 jabłka, okradł więc jabłoń z 6 dzieci. Po drodze zjadł 2 jabłka, więc do domu doniósł 9 jabłek.

20 : 4 + 3 ⋅ 2 – 2 = 5 + 6 – 2 = 11 – 2 = 9

* Każdego roku Maciuś dostawał na urodziny, imieniny, dzień dziecka i Boże Narodzenie od mamy, cioci i babci po dwie pary majtek. Maciuś gromadził prezenty przez 20 lat, aż w końcu postanowił otworzyć sklep z bielizną. Połowę towaru wykupił bogaty biznesmen z Ameryki. Następnie do sklepu wkroczyło 4 fanów odzieży męskiej i każdy z nich kupił 30 par majtek. W nocy sklep został okradziony, w wyniku czego zniknęło 100 par majtek. Maciusiowi pozostało więc 20 par, które zachował na pamiątkę.

4 ⋅ 3 ⋅ 2 ⋅ 20 : 2 – 4 ⋅ 30 – 100 =

= 12 ⋅ 2 ⋅ 20 : 2 – 4 ⋅ 30 – 100 =

= 24 ⋅ 20 : 2 – 4 ⋅ 30 – 100 =

= 480 : 2 – 4 ⋅ 30 – 100 =

= 240 – 120 – 100 =

= 120 – 100 =

20

Działania w nawiasach

Intuicje

Przyjrzyjmy się problemowi, który dręczył doradcę Minosa, króla Krety:

Raz do roku do labiryntu minotaura wpuszczamy siedmioro chłopców i siedmioro dziewcząt. Ile dzieci oddamy do labiryntu w ciągu 5 lat?

W ciągu jednego roku wpuszcza się 7 + 7 = 14 dzieci, więc w ciągu 5 lat będzie to kumulacja 70 dzieci[[2]](#footnote-2). Napotkaliśmy obliczenia, w których najpierw należy wykonać dodawanie, a potem mnożenie. Jak zapisać takie działanie? Zgodnie z umową zapis 5 ⋅ 7 + 7 wymaga najpierw mnożenia, a potem dodawania – takie działanie daje wynik 42. Nie tego chcemy[[3]](#footnote-3). Z pomocą przychodzą nawiasy. Działanie, o które nam chodzi, będzie wyglądało tak:

5 ⋅ (7 + 7)

Matematycy wprowadzili zapis z nawiasami, aby wymusić pierwszeństwo działania wiążącego słabiej.

Teraz możemy już ustanowić pełną regułę, zwaną kolejnością wykonywania działań.

W dowolnym działaniu obliczenia wykonujemy według kolejności:

1. Działania w nawiasach;
2. Mnożenie i dzielenie w kolejności występowania;
3. Dodawanie i odejmowanie w kolejności występowania.

Nawiasów możemy stosować dowolnie dużo, możemy nawet *zagnieżdżać* nawiasy, czyli stosować nawias wewnątrz nawiasu.

* 5 ⋅ (3 + 4) – 10 : (2 + 3) = 5 ⋅ 7 – 10 : 5 = 35 – 2 = 33
* 2 ⋅ (3 + (7 + 3) : 2 + 3 ⋅ (1 + 2) : 9) = 2 ⋅ (3 + 10 : 2 + 3 ⋅ 3 : 9) = 2 ⋅ (3 + 5 + 9 : 9) =

= 2 ⋅ (3 + 5 + 1) = 2 ⋅ (8 + 1) = 2 ⋅ 9 = 18

* 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 2)))) = 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ 4))) =

= 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 8))) = 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ 10)) = 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 +20)) =

= 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ 22) = 2 ⋅ (2 + 44) = 2 ⋅ 46 = 92

Rozszerzenie

Niektórzy uważają, że zapis z użyciem wielu nawiasów, np. 2 + 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 2 ⋅ (2 + 2))) jest nieprzejrzysty, ponieważ nie widać, gdzie dany nawias się zaczyna, a gdzie kończy. Powyższe wyrażenie można zapisać w inny sposób:

2 + 2 ⋅ {2 + 2 ⋅ [2 + 2 ⋅ (2 + 2)]}

Każdy z tych bazgrołów ma swoją nazwę:

* ( ) to *nawias okrągły*
* [ ] to *nawias kwadratowy*
* { } to *nawias klamrowy*

Gdy stosujemy taki zapis, najgłębiej położony będzie nawias okrągły, na zewnętrz będzie nawias kwadratowy. Gdy mamy trzy nawiasy, jak w przykładzie powyżej, nawias klamrowy będzie najbardziej zewnętrzny.

Nie polecamy takiego sposobu zapisu z kilku przyczyn:

* Nie można użyć więcej niż trzech nawiasów, bo matematykom zabrakło pomysłów na więcej bazgrołów nawiasowych.
* Nawiasy kwadratowe i klamrowe mają w matematyce również inne zastosowania, przez co czasem moglibyśmy napotkać dwuznaczności.
* Trzeba zapamiętać, w jakiej kolejności zapisywać nawiasy. Inna kolejność będzie uważana za błędną.

Najlepiej stosować zawsze nawiasy okrągłe. Gdy robi się ich dużo, te bardziej zewnętrzne mogą być po prostu większe.

Rozdzielność mnożenia względem dodawania

Intuicje

Skoro nie boimy się już łączyć mnożenia z dodawaniem, warto wspomnieć o pewnym istotnym fakcie. Do naszych rozważań zaprosimy gościa specjalnego – podłogę łazienkową pana Janusza.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

W wyniku trzęsienia ziemi podłoga pana Janusza rozpadła się na dwa fragmenty:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Zatroskany pan Janusz upewnia się, czy trzęsienie ziemi nie pochłonęło któregoś z kafli łazienkowych. Przed katastrofą liczba kafli wynosiła 4 ⋅ 5 = 20. Pan Janusz liczy, że teraz liczba kafli wynosi

4 ⋅ 3 + 4 ⋅ 2 = 12 + 8 = 20

Pan Janusz może odetchnąć z ulgą. Kafli jest tyle samo.

Naszą obserwację można zapisać w taki sposób:

4 ⋅ 5 = 4 ⋅ (3 + 2) = 4 ⋅ 3 + 4 ⋅ 2

Zależność ta jest bardzo ogólna. Gdy chcemy pomnożyć pewną liczbę przez sumę, możemy rozdzielić to mnożenie na dodawanie. Tak więc 7 ⋅ 9 = (3 + 4) ⋅ 9 = 3 ⋅ 9 + 4 ⋅ 9. Nie jest to specjalnie odkrywcze. Wziąć siedem dziewiątek to to samo, co wziąć trzy dziewiątki, a potem jeszcze 4 dziewiątki.

(3 + 4) ⋅ 9 = 7 ⋅ 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9

3 ⋅ 9 + 4 ⋅ 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9

Z powodu występowania takiej zależności mówimy, że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Jest to dość przydatne, gdy chcemy obliczyć iloczyn wielkich liczb i nie mamy ochoty wykonywać tego w słupku.

* 23 · 7 = (20 + 3) · 7 = 20 · 7 + 3 · 7 = 140 + 21 = 161
* 4 · 124 = 4 · (100 + 20 + 4) = 4 · 100 + 4 · 20 + 4 · 4 = 400 + 80 + 16 = 496
* 34 · 23 = (30 + 4) · 23 = 30 · 23 + 4 · 23 = 30 · (20 + 3) + 4 · (20 + 3) =  
  = 30 · 20 + 30 · 3 + 4 · 20 + 4 · 3 = 600 + 90 + 80 + 12 = 782

1. Myszka komputerowa to nie zabawka. [↑](#footnote-ref-1)
2. I po problemie. [↑](#footnote-ref-2)
3. Chcemy przecież oddać 70 dzieci. [↑](#footnote-ref-3)